COMPITO DI ARITMETICA
12 giugno 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Esercizio 1.
Sia P l'insieme delle parole di lunghezza 3 che si possono scrivere con 26 lettere. Contare le coppie ordinate (α, β) con $\alpha, \beta \in P$ tali che α, β non hanno lettere in comune.

Esercizio 2.
Contare le soluzioni modulo 2^{10} della seguente congruenza:

$$x^5 - 16x \equiv 0 \pmod{2^{10}}.$$

Esercizio 3.
Siano m e n interi positivi e sia d il loro massimo comune divisore. Indichiamo con $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ il gruppo degli omomorfismi da $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con l'operazione di somma.
a) Dimostrare che $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
b) Determinare un sottogruppo di ordine 12 di $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/420\mathbb{Z})$.

Esercizio 4.
Siano p un primo, $a \in \mathbb{F}_p^*$ e $f(x) = (x^4 - a)(x^4 + a) \in \mathbb{F}_p[x]$.
a) Dimostrare che se $p \equiv 3 \pmod 4$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{F}_p$ ha grado 2.
b) Mostrare che si possono scegliere a e p con $p \equiv 1 \pmod 4$ tali che il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{F}_p$ abbia grado 1,2 o 4.